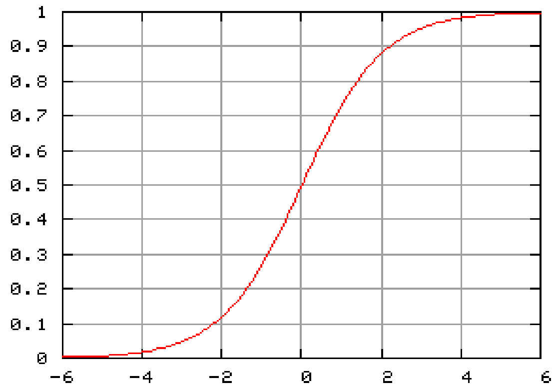
EQUAZIONE LOGISTICA: MODELLO POLINOMIALE PER LA CRESCITA DEMOGRAFICA

L’equazione logistica, anche nota come *modello di Verhulst* o *curva di crescita logistica* è un modello di crescita della popolazione, proposto da Pierre François Verhulst; che descrive una crescita con “andamento ad S”: lenta crescita iniziale, seguita da un’accelerazione e poi da un successivo rallentamento in prossimità del valore massimo permesso, che costituisce un limite asintotico della funzione dove non c’è più crescita . Secondo questo modello il tasso di riproduzione è proporzionale alla popolazione esistente e all’ammontare delle risorse disponibili.



L'incremento di una popolazione in natura viene condizionato da diversi fattori che costituiscono la cosiddetta *resistenza ambientale* e che pongono un limite a tale sviluppo. Per cui una data popolazione avrà sì un accrescimento esponenziale, ma solo inizialmente, per poi subire un flesso ad un certo punto a causa della resistenza ambientale, la quale pone un limite superiore alla curva sotto forma di un asintoto K, per cui tale curva avrà un andamento sigmoide. Essa viene definita curva logistica. [1] L'asintoto rappresenta l'equilibrio raggiunto tra popolazione ed ecosistema. Come tale, perciò, dovrebbe rimanere costante. In realtà l'ambiente è un sistema dinamico, soggetto quindi a continue variazioni, e, di conseguenza, sia l'asintoto sia la curva di accrescimento di una certa popolazione subiscono continue fluttuazioni. la Terra è un pianeta limitatoe finito, come d’altronde lo sono le risorse alimentari e energetiche, non di meno guerre, epidemie e carestie rappresentano fattori limitanti per l’incremento demografico. Quindi lapopolazione non può aumentare in modo esponenziale, ma dovrà trovare un punto di equilibrio tra la crescita e i mezzi di sussistenza per sostenere tale crescita; l’ equilibrio di ciò è rappresentato dal valore soglia, che in termini matematici è l’asintoto orizzontale superiore y =K della funzione logistica. Tale parametro è di tipo sperimentale e dipende dalle condizioni iniziali. nel mio modello porrò d'ora in poi K=1, non influendo questo dato per nulla sullo studio della funzione.

L'equazione logistica può essere approssimata, secondo lo sviluppo in serie di Taylor [2], ad una funzione polinomiale fratta (si ricordi che il modello reale prevede una funzione esponenziale , frutto di una equazione differenziale):

$$y = \frac{Kx^2}{x^2+r(x+1)} + \mathrm{P0}$$

Dove, ponendo **x>0** (vincolo fisico), **X=tempo** (può essere un anno, come un mese o un decennio), **Y=popolazione in base al tempo**; **P0=popolazione iniziale**; **K=termine asintotico della popolazione (valore massimo raggiunto)** e **r=fattore di crescita.**

In questo senso ne deriva che: K deve essere sempre > di P0, e Pf, cioè la popolazione finale è data dalla somma di K + P0.

Quello che segue è un modello puramente teorico analizzato secondo le conoscenze fornitemi nel corso di quest’anno scolastico; pur sapendo che esistono però anche altri modelli simili.

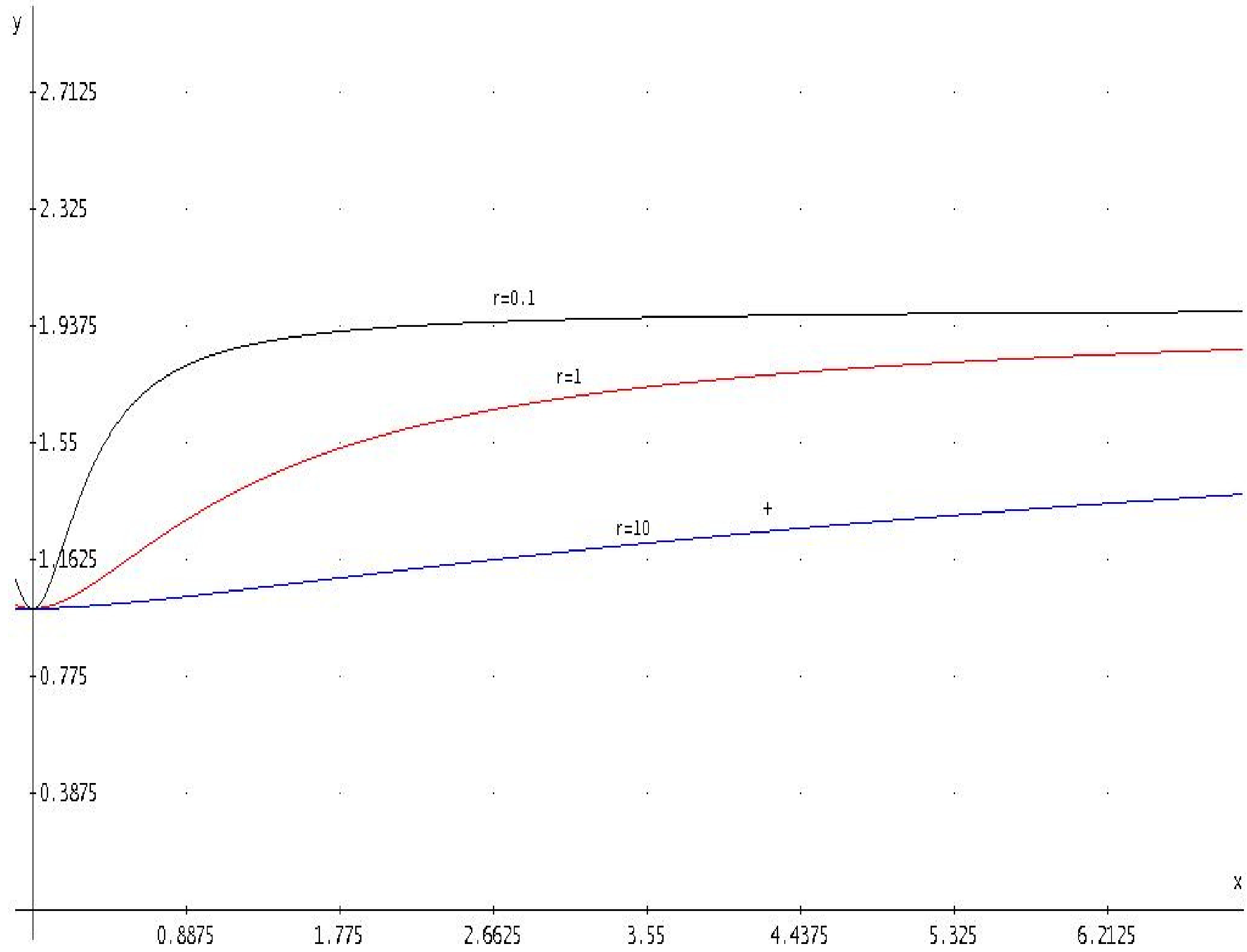
Nel mio studio preliminare mi sono occupata di studiare la funzione $y = \frac{x^2}{x^2+x+1}$, ponendo quindi K, r =1, e P0=0.

Ho quindi svolto uno studio di funzione polinomiale fratta, soffermandomi poi sulla derivata seconda, da cui ho svolto un'approssimazione numerica di flesso, secondo il metodo della bisezione o di Newton.

In seguito ho provato a variare la variabile r e a sottrarre valori, quali x e 0,1x; ponendo indicativamente P0=1, per osservarne il cambiamento dell'andamento di crescita demografica a livello puramente grafico.

Grafico della popolazione al variare di r

Variando r si può osservare che, al diminuire di r, la crescita iniziale sarà più repentina, in quanto $\frac{1}{r}$ potrebbe rappresentare la quantità di risorse disponibili inizialmente.

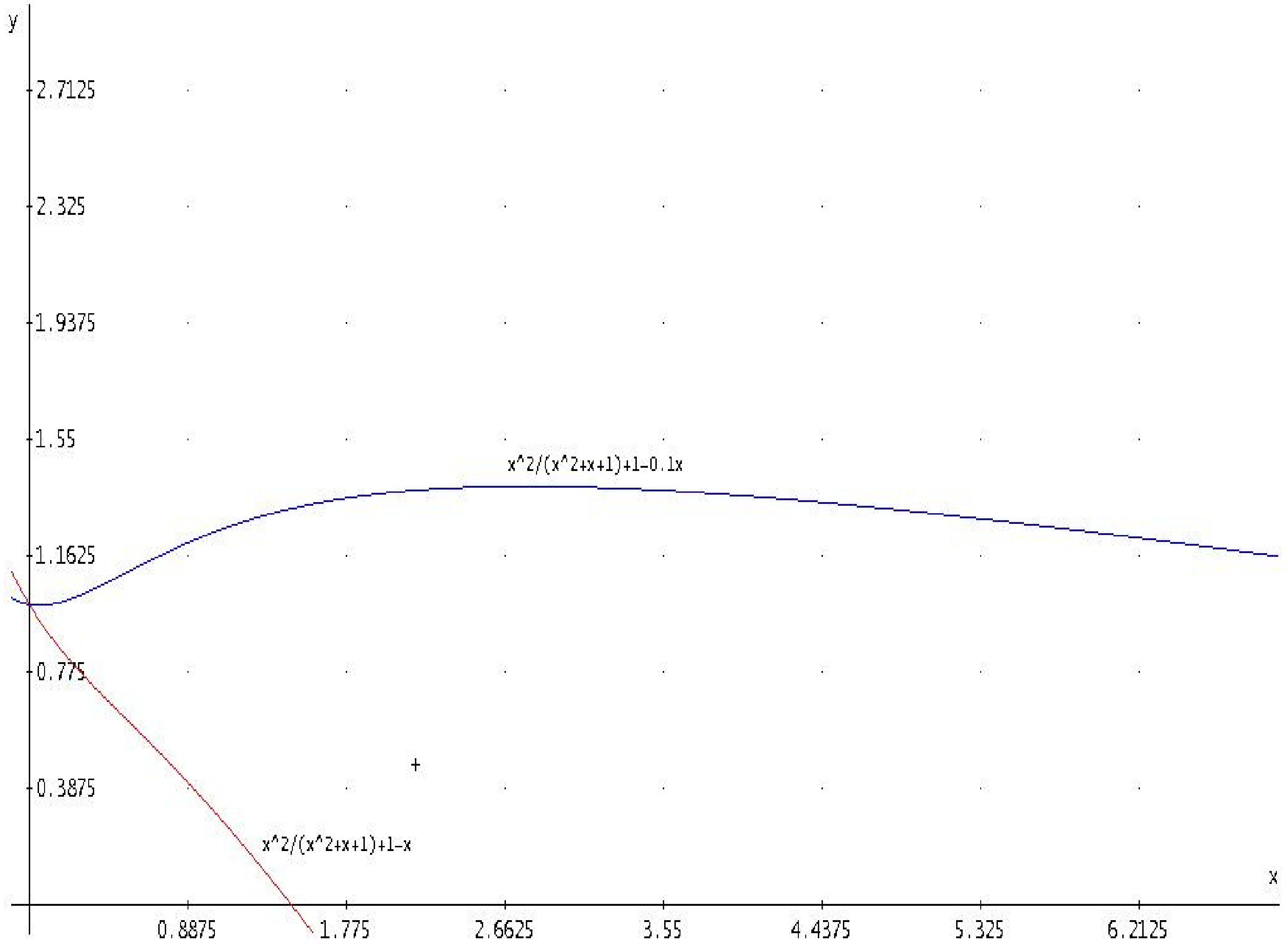


Modelli ulteriori: Guerra

Ipoteticamente sottraendo x si potrebbe rappresentare il caso di una guerra continua che non permette una crescita demografica, ma anzi fa calare drasticamente la popolazione. Invece sottraendo 0,1 x si potrebbe rappresentare una situazione simile, in presenza però di una certa quantità di risorse, che permettono all'inizio una leggera crescita demografica, seguita poi da una caduta progressiva della popolazione.

$$y = \frac{x^2}{x^2 + x + 1} - x$$

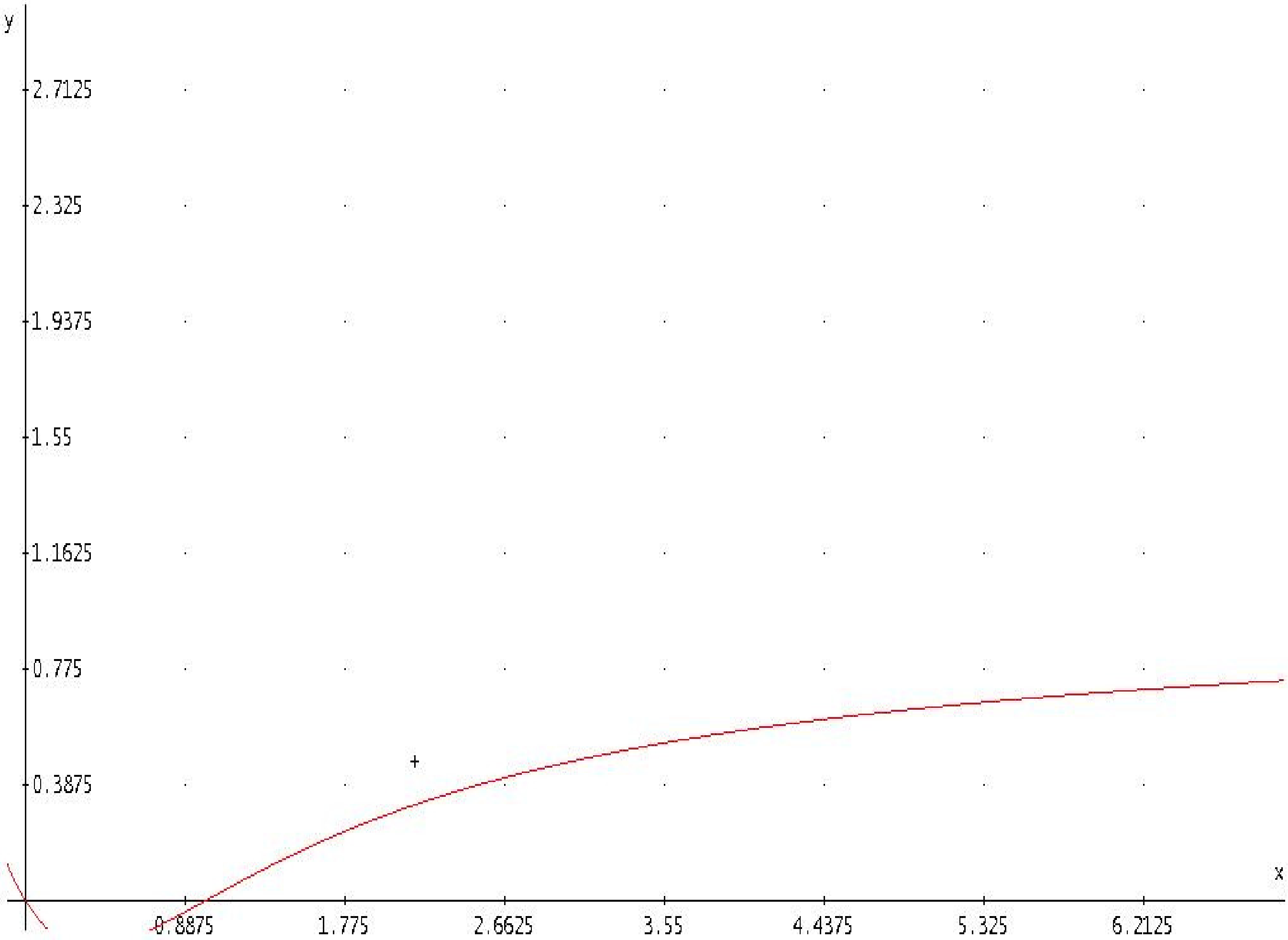
$y = \frac{x^2}{x^2+x+1}$ - 0,1x



Modello ulteriore:diffusione di una malattia

Con questa funzione $y = \frac{x^2 - x}{x^2+x+1}$

si può ipoteticamente rappresentare una situazione di diffusione di una malattia, di cui si è però trovata la cura: la popolazione infatti scende inizialmente, per poi risalire improvvisamente.



Conclusioni

Il modello preso in esame, descrive con una buona approssimazione la funzione logistica, funzione che sarebbe stata impossibile da studiare con le conoscenze acquisite nel corso di Matematica del 5 anno del liceo di Scienze sociali, dove ci siamo limitati allo studio delle sole funzioni razionali intere fratte e irrazionali. Il mio modello pur non prevedendo alcuna equazione differenziale, ma limitandosi ad approssimare l'equazione logistica già nota, permette tuttavia di poter fare alcuni passi ulteriori, come il modello di malattia, di guerra o di cambiare parametricamente il fattore di crescita. Il modello è inoltre interessante perchè permette di determinare numericamente il flesso della funzione usando il metodo di bisezione, anche questo mai studiato a scuola.

Infine, da tale studio ho capito come utilizzando la matematica, si riescono a fare previsioni e studi su altri campi di ricerca, come quello della dinamica delle popolazioni.

Bibliografia

[1] http://mathworld.wolfram.com/LogisticEquation.html

[2] http://www.liceo-newton.com/serie_di_taylor.htm

[3] Generalizzazione dell'equazione logistica di A. Urso, scaricabile presso
http://www.matematicamente.it/staticfiles/approfondimenti/Urso-Logistica.pdf
[4] Modelli di evoluzione di una popolazione isolata, Modello di Malthus, scaricabile presso
calvino.polito.it/~mazzi/analisi%20II/Malthus.pdf

[5] http://numerici.liceofoscarini.it/equazioni/bisezione.html